CHAPITRE XIX : RELATIONS DE COMPARAISON
Correction

a) On a $n+3\ln n \sim n$ car $\frac{n+3\ln n}{n} = 1 + 3\frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par opérations sur les équivalents, il vient

$$u_n \sim ne^{-(n+1)} = \frac{1}{e}ne^{-n}.$$

b) On a $n+1 \sim n$. Par ailleurs, on a

$$\frac{\ln(n^2+1)}{2\ln n} = \frac{\ln\left(n^2(1+\frac{1}{n^2})\right)}{2lnn} = \frac{\ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $\ln(n^2+1) \sim 2\ln n$. Par opérations sur les équivalents, il vient

$$\frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \sim \frac{2\ln n}{n}.$$

c) On a $n^2+n+1 \sim n^2$ et $n^2-n+1 \sim n^2$. Par opérations sur les équivalents, on obtient

$$\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} = \frac{(n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n^2-n+1)^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{(n^2)^{\frac{1}{2}}}{(n^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{n}{n^{\frac{2}{3}}} = n^{\frac{1}{3}}.$$

Ainsi, on a $u_n \sim n^{\frac{1}{3}}$.