CHAPITRE XIX : RELATIONS DE COMPARAISON

Correction

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant décroissante sur $k \in [k, k+1]$, pour tout réel $t \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

b) Soit $n \geqslant 2$ de telle sorte que $1 \leqslant n-1$. En sommant cette double inégalité obtenue lors de la question précédente pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et en utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Or, on a $\int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^n = 2\sqrt{n} - 2$ donc $v_n - 1 \leqslant 2\sqrt{n} - 2 \leqslant v_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a montré l'inégalité $v_n \geqslant 2\sqrt{n} + 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n}$. Par comparaison des limites, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, il vient $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
En utilisant la double inégalité obtenue lors de la question *b*), pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Grâce au théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 1$, ie $v_n \sim 2\sqrt{n}$.