CHAPITRE XIX : RELATIONS DE COMPARAISON
Correction

a) On a $g(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))$ donc il existe un voisinage de a, noté $V(a)$, et il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $x \in V(a)$, on ait $\left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| \leqslant K$. Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Dès lors, pour tout $x \in V(a)$, on peut écrire
$$\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \cdot \left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| \leqslant K \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$
Grâce au théorème des gendarmes, il vient $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$, ie $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$.

b) On a $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ donc il existe un voisinage de a, noté $V_1(a)$, et il existe $K_1 \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $x \in V_1(a)$, on ait $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant K_1$.

De plus, on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$ donc $\frac{g}{h}$ est bornée au voisinage de a. Ainsi, il existe un voisinage de a, noté $V_2(a)$, et il existe $K_1 \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $x \in V_2(a)$, on ait $\left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| \leqslant K_2$.

Dès lors, pour tout $x \in V_1(a) \cap V_2(a)$, on a
$$\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \cdot \left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| \leqslant K_1 K_2.$$
Par conséquent, la fonction $\frac{f}{h}$ est bornée au voisinage de a, ie $f(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))$.

c) On a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$. On obtient alors
$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1 \times 0 = 0.$$
Autrement dit, on a $f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$.