

CHAPITRE XIX : RELATIONS DE COMPARAISON

Correction

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement positives, en multipliant de part et d'autre par $\frac{u_n}{v_{n+1}}$ l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, on obtient

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}.$$

Par conséquent, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N . Cette même suite étant composée de termes positifs, elle est également minorée par 0. Or toute suite décroissante et minorée étant convergente, il s'ensuit que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Par ailleurs, toute suite convergente étant bornée, on déduit que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Autrement dit, il vient $u_n = O(v_n)$.