CHAPITRE XVIII : CONVEXITÉ

Correction

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\diamond$ Méthode 1 : La fonction $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \geqslant 0$. La courbe représentative de f est donc sous sa corde correspondant aux abscisses -1 et 1. Cette dernière a pour équation :

$$y = x\frac{f(1) - f(-1)}{2} + \frac{f(1) + f(-1)}{2} = x\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} + \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda).$$

Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$f(x) \leqslant x\frac{f(1) - f(-1)}{2} + \frac{f(1) + f(-1)}{2} \Leftrightarrow e^{\lambda x} \leqslant \mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda).$$

$\diamond$ Méthode 2 : On remarque $\mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda) = \frac{1+x}{2}e^{\lambda} + \frac{1-x}{2}e^{-\lambda}$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\frac{1+x}{2} \in [0, 1]$, $\frac{1-x}{2} \in [0, 1]$ avec $\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1$. Par convexité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$e^{\lambda x} = \exp\left(\frac{1+x}{2}\lambda + \frac{1-x}{2}(-\lambda)\right) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(\lambda) + \frac{1-x}{2}\exp(-\lambda) = \mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda).$$