CHAPITRE XVII : POLYNÔMES
Correction

1. Si P vérifie $(\mathcal{P})$, comme $1 \in \mathbb{U}$, on a $1 = |P(1)| = |\lambda|$.
Réciproquement, si $|\lambda| = 1$, pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a
$$|P(z)| = |\lambda z^n| = |\lambda||z|^n = |\lambda| = 1.$$
Ainsi, le polynôme $P(X) = \lambda X^n$ vérifie $(\mathcal{P})$ si et seulement si $|\lambda| = 1$.

2. a) La transformation φ est une similitude directe.
   - Si a_1 alors φ est la translation de vecteur d'affixe a_0.
   - Si $a_1 \neq 1$, on note θ un argument de a_1 de telle sorte que l'on a $a_1 = |a_1|e^{i\theta}$. On note $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega = a_0 + a_1\omega$, ie $\omega = \frac{a_0}{1-a_1}$. On peut alors écrire
   $$\varphi(z) - \omega = a_1(z - \omega) = |a_1|e^{i\theta}(z - \omega).$$
   En notant Ω le point d'affixe ω, φ est la composée commutative de l'homothétie de centre Ω et rapport $|a_1|$ avec la rotation d'angle θ et de centre Ω.

   b) • Soit $z \in \mathbb{U}$. On a
   $$|\varphi(z) - a_0| = |za_1| = |z||a_1| = |a_1|$$
   donc $\varphi(z)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre le point d'affixe a_0 et de rayon $|a_1|$, ie $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathcal{C}$.
   • Soit $Z \in \mathcal{C}$, ie $|Z - a_0| = |a_1|$. On pose $z = \frac{1}{a_1}(Z - a_0)$ de telle sorte que $Z = a_1 z + a_0 = \varphi(z)$. Or
   $$|z| = \left|\frac{Z - a_0}{a_1}\right| = \frac{|Z - a_0|}{|a_1|} = \frac{|a_1|}{|a_1|} = 1.$$
   Ainsi, il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $Z = \varphi(z)$, ie $Z \in \varphi(\mathbb{U})$ ce qui prouve $\mathcal{C} \subset \varphi(\mathbb{U})$.
   • Par double inclusion, on a $\varphi(\mathbb{U}) = \mathcal{C}$.

   c) ⋄ Si $a_0 = 0$ et $|a_1| = 1$ alors $P(X) = a_1 X$ avec $|a_1| = 1$ donc P est de la forme de la question **??** donc P vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
   ⋄ Si $P(X) = a_0 + a_1 X$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ alors, par définition, on a $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Grâce au résultat de la question précédente, il vient $\mathcal{C} \subset \mathbb{U}$. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre a_0 et de rayon $|a_1|$ se retrouve inscrit sur le cercle unité de centre 0 et de rayon 1. Par unicité du centre et du rayon, il vient
   $$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad |a_1| = 1.$$
   Remarque : On peut se convaincre si besoin de cet argument d'unicité en paramétrant $\mathcal{C}$. Pour tout réel t, le complexe $z = a_0 + |a_1|e^{it}$ est supposé appartenir à $\mathbb{U}$, ie
   $$\begin{aligned}
   &\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|a_0 + |a_1|e^{it}\right| = 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left||a_0|e^{i\theta} + |a_1|e^{it}\right| = 1 \quad \text{où } a_0 = |a_0|e^{i\theta} \\
   \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left||a_0| + |a_1|e^{ix}\right| = 1 \quad \text{où l'on a posé } x = t - \theta, \\
   \Leftrightarrow &\forall x \in \mathbb{R}, \quad |a_0|^2 + |a_1|^2 + 2|a_0||a_1|\cos(x) = 1 \\
   \Leftrightarrow &\begin{cases} |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1 \\ 2|a_0||a_1| = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1 \\ |a_0| = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |a_1| = 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \quad .
   \end{aligned}$$

3. On prendra garde au fait que $0 \leqslant \deg(Q) \leqslant n$ seulement.

a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned} z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} &= z^n \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{\overline{z}}\right)^k} = z^n \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \left(\frac{1}{\overline{\overline{z}}}\right)^k = z^n \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} z^{n-k} \\ &= \overline{a_0} z^n + \overline{a_1} z^{n-1} + \cdots + \overline{a_{n-1}} z + \overline{a_n} \\ &= Q(z). \end{aligned}$$

b) • Soit $z \in \mathbb{U}$. On a $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ donc $z = \frac{1}{\overline{z}}$. On peut alors écrire

$$P(z)Q(z) = z^n P(z) \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = z^n P(z) \overline{P(z)} = z^n |P(z)|^2 = z^n$$

car P vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

• On vient de prouver que tout complexe de $\mathbb{U}$ est racine de $P(X)Q(X) - X^n$. Ce polynôme possède ainsi une infinité de racines ce qui permet de conclure que $P(X)Q(X) - X^n$ est le polynôme nul. Autrement dit, on a

$$P(X)Q(X) = X^n.$$

c) • Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. On reprend les notations de la question précédente. En particulier, on note $n = \deg(P) \geqslant 0$. On a

$$n = \deg(X^n) = \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) = n + \deg(Q)$$

donc $\deg(Q) = 0$ de quoi l'on tire $Q(X) = \overline{a_n}$ et $P(X) = a_n X^n$. Grâce à la question 1, le polynôme $P(X) = a_n X^n$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$, on a également $|a_n| = 1$.

• Réciproquement, on a prouvé également lors de la question 1 que $P(X) = a_n X^n$ avec $|a_n| = 1$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

• Par conséquent, l'ensemble des polynômes complexes laissant le cercle unité invariant est l'ensemble des polynômes de la forme

$$P(X) = \lambda X^n \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } |\lambda| = 1.$$