CHAPITRE XVII : POLYNÔMES

Correction

a) On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{P_0(x)}{(x^2+1)^{0+\frac{1}{4}}}$$

où l'on a posé $P_0(X) = 1$ avec $\deg(P_0) = 0$.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, il existe P_n de degré n tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+\frac{1}{4}}}$. Alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) &= \frac{P_n'(x)(x^2+1)^{n+\frac{1}{4}} - P_n(x)(n+\frac{1}{4})2x(x^2+1)^{n-\frac{3}{4}}}{(x^2+1)^{2(n+\frac{1}{4})}} \\ &= \frac{(x^2+1)P_n'(x) - 2x(n+\frac{1}{4})P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1+\frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

On note a_n le coefficient dominant de P_n qui est non nul puisque P_n est de degré n. Dès lors, le polynôme $(X^2+1)P_n'(X)$ est un polynôme de degré $n+1$ dont le coefficient dominant est na_n et le polynôme $2X(n+\frac{1}{4})P_n(X)$ est de degré $n+1$ dont le coefficient dominant est $2(n+\frac{1}{4})a_n$. Or $na_n - 2(n+\frac{1}{4})a_n = -(n+\frac{1}{2})a_n \neq 0$ donc le polynôme

$$P_{n+1}(X) = (X^2+1)P_n'(X) - 2X(n+\frac{1}{4})P_n(X)$$

est de degré $n+1$ et on a bien

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1+\frac{1}{4}}}$$

ce qui achève la récurrence.

b) On a $f'(x) = \frac{-x/2}{(x^2+1)^{\frac{5}{4}}} = -\frac{x/2}{x^2+1}f(x)$ donc f est solution de l'équation différentielle $(x^2+1)y' + \frac{x}{2}y = 0$.

c) On a montré lors de la question précédente, que f vérifie l'équation

$$(x^2+1)f'(x) + \frac{x}{2}f(x) = 0.$$

En dérivant $n \geqslant 1$ fois cette équation et en appliquant la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(x^2+1)^{(k)}f^{(n+1-k)}(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}f^{(n-k)}(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) + \frac{x}{2}f^{(n)}(x) + \frac{n}{2}f^{(n-1)}(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &(x^2+1)\frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1+\frac{1}{4}}} + x(2n+\frac{1}{2})\frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+\frac{1}{4}}} + n(n-\frac{1}{2})\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+1)^{n-1+\frac{1}{4}}} = 0 \\ \Leftrightarrow &P_{n+1}(x) + (2n+\frac{1}{2})xP_n(x) + n(n-\frac{1}{2})(x^2+1)P_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

d) On a montré lors de la question a) que, pour tout réel x et tout entier n positif, on a

$$P_{n+1}(x) = (x^2+1)P_n'(x) - x(2n+\frac{1}{2})P_n(x).$$

En insérant cette relation dans celle obtenue en c), il vient immédiatement

$$(x^2+1)P_n'(x) + n(n-\frac{1}{2})(x^2+1)P_{n-1}(x) = 0$$

de quoi l'on tire

$$Pn'(x) = -n(n-\frac{1}{2})P_{n-1}(x).$$