CHAPITRE XVII : POLYNÔMES
Correction

a) On note $Q(X) = X^n - 1$. On a bien

$$(X^n + 1)Q(X) = (X^n + 1)(X^n - 1) = X^{2n} - 1 = (X^2)^n - 1 = Q(X^2).$$

b) Le polynôme nul convient. Autrement, si $P \neq 0$, on a $\deg(P) \geqslant 0$ et $\deg(P(X^2)) = 2\deg(P)$ donc

$$2\deg(P) = \deg(P(X^2)) = \deg((X^n + 1)P(X)) = \deg(X^n + 1) + \deg(P) = n + \deg(P)$$

donc $\deg(P) = n$.

c) Par hypothèse, on a $\omega^n = -1$. En spécifiant la relation (E) en $X = \omega$, on obtient

$$P(\omega^2) = (\omega^n + 1)P(\omega) = 0.$$

En spécifiant la relation (E) en $X = -\omega$, on obtient

$$0 = P(\omega^2) = P((-\omega)^2) = ((-\omega)^n + 1)P(-\omega) = ((-1)^n\omega^n + 1)P(-\omega) = ((-1)^{2n} + 1)P(-\omega) = 2P(-\omega)$$

de quoi l'on tire $P(-\omega) = 0$, ie $-\omega$ est une racine de P.

d) Si P n'est pas nul, on peut écrire $\omega = -e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, ..., n-1\}$ car n impair, auquel cas $-\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine de P. Les racines n-ième de l'unité étant deux à deux distinctes, P est un polynôme de degré n dont on dispose de n racines. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tel que

$$P(X) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = \lambda(X^n - 1).$$

Grâce à la première question, on sait que ces polynômes vérifient bien (E). Par conséquent, l'ensemble des polynômes vérifiant (E) est l'ensemble des polynômes de la forme

$$P(X) = \lambda(X^n - 1) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$