CHAPITRE XVII : POLYNÔMES

Correction

a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$. On a

$$\phi(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)(X) = X(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda X P(X) + \mu X Q(X) = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q).$$

La fonction ϕ est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

Soit $P \in \ker(\phi)$. On a $\phi(P) = 0 \Leftrightarrow XP(X) = 0 \Leftrightarrow P = 0$ donc $\ker(\phi) \subset \{0\}$. L'inclusion $\{0\} \subset \ker(\phi)$ étant immédiate, on obtient $\ker(\phi) = \{0\}$ et ϕ est injective.

On montre que le polynôme constant $Q = 1$ n'appartient pas à $Im(\phi)$. Par l'absurde, si $Q \in Im(\phi)$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $1 = \phi(P) = XP(X)$. Alors

$$0 = \deg(1) = \deg(XP(X)) = \deg(X) + \deg(P) = 1 + \deg(P) \geqslant 1.$$

On obtient une contradiction donc $1 \notin Im(\phi)$ et ϕ n'est pas surjective.

b) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$. On a

$$\psi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda \psi(P) + \mu \psi(Q).$$

La fonction ψ est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

Soit $Q = a_n X_n + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum\limits_{n=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.
On pose $P = \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} X^2 + a_0 X \in \mathbb{C}[X]$. Alors

$$\psi(P) = (\frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} X^2 + a_0 X)' = a_n X_n + \cdots + a_1 X + a_0 = Q$$

donc ψ est surjective.

Le polynôme constant égal à 1 vérifie $\psi(1) = 0$ donc $1 \in \ker(\psi)$. Par conséquent, on a $\ker(\psi) \neq \{0\}$ et ψ n'est pas injective.