CHAPITRE XVII : POLYNÔMES

Correction

a) On a

$$\begin{aligned}
P_1 &= (1+X)-(1-X) = 2X,\\
P_2 &= (1+X)^2-(1-X)^2 = (1+2X+X^2)-(1-2X+X^2) = 4X,\\
P_3 &= (1+X)^3-(1-X)^3 = (1+3X+3X^2+X^3)-(1-3X+3X^2-X^3) = 6X+2X^3\\
P_4 &= (1+X)^4-(1-X)^4 = (1+4X+6X^2+4X^3+X^4)-(1-4X+6X^2-4X^3+X^4)\\
&= 8X+8X^3.
\end{aligned}$$

b) En utilisant la formule du binôme de Newton, on peut écrire

$$P_n = (1+X)^n-(1-X)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-X)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-(-1)^k)X^k.$$

Par conséquent, le coefficient X^n dans P_n est $1-(-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ 2 \text{ si } n \text{ impair}\end{cases}$ et le coefficient X^{n-1} dans P_n est $\binom{n}{n-1}(1-(-1)^{n-1}) = \begin{cases} 2n \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair}\end{cases}$.

Il s'ensuit que P_n est un polynôme de degré n si n est impair, de degré $n-1$ si n pair.

c) On a $P_n(0) = 1^n - 1^n = 1-1 = 0$ donc 0 est une racine de P_n. On en déduit que X divise P_n.

d) On a $P_n(1) = 2^n$ donc 1 n'est pas une racine de P_n. Dès lors, soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. On a

$$\begin{aligned}
z \text{ est une racine de } P_n &\Leftrightarrow P_n(z) = 0 \Leftrightarrow (1+z)^n-(1-z)^n = 0\\
&\Leftrightarrow (1+z)^n = (1-z)^n \Leftrightarrow \frac{(1+z)^n}{(1-z)^n} = 1 \text{ car } 1-z \neq 0\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1.
\end{aligned}$$

e) On note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ de telle sorte que l'ensemble des racines $n^{ième}$ de l'unité s'écrit sous la forme

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ \ z^n = 1\} = \{\omega_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
z \text{ est une racine de } P_n &\Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\quad \frac{1+z}{1-z} = \omega_k\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\quad 1+z = (1-z)\omega_k\\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\quad z(\omega_k+1) = \omega_k - 1.
\end{aligned}$$

Or $\omega_k + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \pi \Leftrightarrow 2k = n$. Par conséquent :

- Si n est impair, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\omega_k + 1 \neq 0$ et ainsi

$$\begin{aligned} & z \text{ est une racine de } P_n \\ \Leftrightarrow & \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n}} - e^{-\frac{2ik\pi}{2n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{2n}} + e^{\frac{-2ik\pi}{2n}}} = \frac{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

- Si $n = 2p$ est pair, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ avec $k \neq \frac{n}{2} = p$, on a $\omega_k + 1 \neq 0$ et ainsi

$$z \text{ est une racine de } P_n \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n]\!] \backslash \{p\}, \quad z = i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$