CHAPITRE XVII : POLYNÔMES
Correction

$\diamond$ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il nous faut justifier que $nP - XP' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Grâce aux opérations sur les polynômes, on a $nP - XP'$ qui est un polynôme. Sachant $\deg(nP) = \deg(P) \leqslant n$ et $\deg(XP') = 1 + \deg(P') = \deg(P) \leqslant n$, on a

$$\deg(nP - XP') \leqslant \max\{\deg(nP), \deg(XP')\} \leqslant n$$

ce qui est insuffisant. En notant a_n le coefficient devant X^n dans P (avec a_n éventuellement nul), Le terme devant X^n dans nP est na_n et le terme devant X^n dans XP' est na_n (celui devant X^{n-1} dans P'). Ainsi, les termes devant X^n s'annulent dans $nP-XP'$ et $\deg(nP-XP') \leqslant n-1$, ie $nP-XP' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. La fonction ϕ est bien définie.
$\diamond$ Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + \mu Q) &= n(\lambda P + \mu Q) - X(\lambda P + \mu Q)' = n(\lambda P + \mu Q) - X(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda(nP - XP') + \mu(nQ - XQ') = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q).\end{aligned}$$

L'application ϕ est linéaire.
$\diamond$ Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

$$\begin{aligned}\phi(P) = nP - XP' = n\sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} n a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k = \sum_{k=0}^{n}(n-k) a_k X^k \\ = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) a_k X^k.\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\begin{aligned}P \in \ker\phi \Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_k X^k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (n-k)a_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_k = 0 \\ \Leftrightarrow P = a_n X^n.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\ker\phi = \mathrm{Vect}(X^n)$.