CHAPITRE XVI : APPLICATIONS LINÉAIRES
Correction

a) Grâce à l'exercice 4, on a déjà $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

On montre $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$.
Soit $x \in \ker(g \circ f)$ donc $g \circ f(x) = 0$. Par ailleurs, par hypothèse, $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ donc

$$f(x) = \mathrm{Id}_E(f(x)) = (f \circ g) \circ f(x) = f \circ (g \circ f)(x) = f(g \circ f(x)) = f(0) = 0.$$

Il s'ensuit $x \in \ker(f)$ puis $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$.

On montre $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Dès lors, $f(y) = f \circ g(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x$ donc $y = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Par doubles inclusions, on obtient $\ker(g \circ f) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

b) On a

$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{Id}_E \circ f = g \circ f$$

donc $g \circ f$ est un projecteur.

c) L'image et le noyau d'un projecteur de E étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, grâce au résultat de la question précédente, on obtient

$$E = \ker(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f).$$

Par ailleurs, on a vu lors de la question *a)* que $\ker(g \circ f) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$. On obtient alors immédiatement

$$E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g).$$