CHAPITRE XVI : APPLICATIONS LINÉAIRES
Correction

a) On a
$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q$$
car p et q sont des projecteurs. Ainsi, $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q$ donc $p \circ q$ est un projecteur.

b)
- On a $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p)$ (cf exercice 4) et $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(q \circ p) \subset \mathrm{Im}(q)$. Par conséquent $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. On a $y \in \mathrm{Im}(p)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Comme p est un projecteur, on obtient $y = p(x) = p \circ p(x) = p(y)$. Par ailleurs, $y \in \mathrm{Im}(q)$ donc il existe $x' \in E$ tel que $y = q(x')$. Ainsi, $y = p(y) = p(q(x')) = p \circ q(x') \in \mathrm{Im}(p \circ q)$. Il s'ensuit $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p \circ q)$.
  Par double inclusion, on obtient $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p \circ q)$.
- On a $\ker(p) \subset \ker(q \circ p) = \ker(p \circ q)$ (cf exercice 4) et $\ker(q) \subset \ker(p \circ q)$ donc $\ker(p) + \ker(q) \subset \ker(p \circ q)$.
  Soit $x \in \ker(p \circ q)$. On écrit $x = x - p(x) + p(x)$. Alors
  $$p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0 \text{ car } p \text{ est un projecteur}$$
  et $q(p(x)) = q \circ p(x) = 0$ car $x \in \ker(p \circ q)$. Par conséquent, on a la décomposition $x = (x - p(x)) + p(x) \in \ker(p) + \ker(q)$. Il s'ensuit $\ker(p \circ q) \subset \ker(p) + \ker(q)$.
  On obtient l'égalité demandée par double inclusion.