CHAPITRE XVI : APPLICATIONS LINÉAIRES
Correction

1. a) $\diamond$ Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\Phi(f) : t \mapsto f'(t) + tf(t)$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi Φ est bien à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$\diamond$ Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda f + \mu g)(t) &= (\lambda f + \mu g)'(t) + t(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda f'(t) + \mu g'(t) + t(\lambda f(t) + \mu g(t))\\ &= \lambda(f'(t) + tf(t)) + \mu(g'(t) + tg(t)) = (\lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g))(t).\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$ donc Φ est linéaire.
$\diamond$ Par conséquent, Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) • On montre que $\ker(\Phi - 2I) \subset \ker(\Phi^2 - 4I)$ et $\ker(\Phi + 2I) \subset \ker(\Phi^2 - 4I)$.
Si $f \in \ker(\Phi - 2I)$ alors $\Phi(f) = 2f$ donc $\Phi^2(f) = \Phi(\Phi(f)) = \Phi(2f) = 2\Phi(f) = 4f$ qui donne $f \in \ker(\Phi^2 - 4I)$. On a établi $\ker(\Phi - 2I) \subset \ker(\Phi^2 - 4I)$. On montre de même $\ker(\Phi + 2I) \subset \ker(\Phi^2 - 4I)$.
• On montre que $\ker(\Phi - 2I) \cap \ker(\Phi + 2I) = \{0\}$. Soit $f \in \ker(\Phi - 2I) \cap \ker(\Phi + 2I)$. On a $f \in \ker(\Phi - 2I)$ donc $\Phi(f) = 2f$ et on a $f \in \ker(\Phi + 2I)$ donc $\Phi(f) = -2f$. Par conséquent

$$2f = -2f \Rightarrow 4f = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Ainsi $\ker(\Phi - 2I) \cap \ker(\Phi + 2I) \subset \{0\}$. Le vecteur nul appartenant toujours à un noyau, on a toujours $\{0\} \subset \ker(\Phi - 2I) \cap \ker(\Phi + 2I)$ de quoi l'on tire, par double inclusion

$$\ker(\Phi - 2I) \cap \ker(\Phi + 2I) = \{0\}.$$

• On montre que $\ker(\Phi - 2I) + \ker(\Phi + 2I) = \ker(\Phi^2 - 4I)$.
$\rightarrow$ On a $\ker(\Phi-2I) \subset \ker(\Phi^2-4I)$ et $\ker(\Phi+2I) \subset \ker(\Phi^2-4I)$ donc $\ker(\Phi-2I)+\ker(\Phi+2I) \subset \ker(\Phi^2 - 4I)$.
$\rightarrow$ On montre $\ker(\Phi^2-4I) \subset \ker(\Phi-2I)+\ker(\Phi+2I)$ par analyse-synthèse. Soit $f \in \ker(\Phi^2-4I)$.
Analyse : On suppose qu'il existe $f_1 \in \ker(\Phi - 2I)$ et $f_2 \in \ker(\Phi + 2I)$ telles que $f = f_1 + f_2$. On a $\Phi(f_1) = 2f_1$, $\Phi(f_2) = -2f_2$ de quoi l'on tire $\Phi(f) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2) = 2f_1 - 2f_2$. Ainsi

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = f \\ f_1 - f_2 = \frac{1}{2}\Phi(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}\Phi(f) \\ f_2 = \frac{1}{2}f - \frac{1}{4}\Phi(f) \end{cases}.$$

Synthèse : On pose $f_1 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}\Phi(f)$ et $f_2 = \frac{1}{2}f - \frac{1}{4}\Phi(f)$. Sachant que $f \in \ker(\Phi^2 - 4I)$, on a $\Phi^2(f) = 4f$ de quoi l'on tire

$$\Phi(f_1) = \frac{1}{2}\Phi(f) + \frac{1}{4}\Phi^2(f) = \frac{1}{2}\Phi(f) + f = 2f_1 \quad \text{donc } f_1 \in \ker(\Phi - 2I),$$
$$\Phi(f_2) = \frac{1}{2}\Phi(f) - \frac{1}{4}\Phi^2(f) = \frac{1}{2}\Phi(f) - f = -2f_2 \quad \text{donc } f_2 \in \ker(\Phi + 2I).$$

Par conséquent $f = \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}\Phi(f) + \frac{1}{2}f - \frac{1}{4}\Phi(f) = f_1 + f_2 \in \ker(\Phi - 2I) + \ker(\Phi + 2I)$.

Il s'ensuit $\ker(\Phi^2 - 4I) \subset \ker(\Phi - 2I) + \ker(\Phi + 2I)$ puis $\ker(\Phi^2 - 4I) = \ker(\Phi - 2I) + \ker(\Phi + 2I)$ par double inclusion.
• Par conséquent, on a $\ker(\Phi^2 - 4I) = \ker(\Phi - 2I) \oplus \ker(\Phi + 2I)$.

2. a) D'après le cours, l'ensemble S des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

   b) On a

$$\begin{aligned} f \in \ker(\Phi^2 - 4I) &\Leftrightarrow \Phi^2(f) = 4f \Leftrightarrow \Phi(\Phi(f)) = 4f \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)'(t) + t\Phi(f)(t) = 4f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad (f'(t) + tf(t))' + t(f'(t) + tf(t)) = 4f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + f(t) + tf'(t) + t(f'(t) + tf(t)) = 4f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + 2tf'(t) + (t^2 - 3)f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ est solution de } (E). \end{aligned}$$

   Par conséquent, on a $S = \ker(\Phi^2 - 4I)$.

   c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I)$. On a

$$\begin{aligned} f \in E_\lambda \Leftrightarrow \Phi(f) = \lambda f &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + tf(t) = \lambda f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + (t - \lambda)f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = ce^{-\left(\frac{1}{2}t^2 - \lambda t\right)}. \end{aligned}$$

   Ainsi, tout réel λ, on a

$$E_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I) = \left\{t \mapsto ce^{\lambda t - \frac{1}{2}t^2}, \quad c \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(f_\lambda) \quad \text{où } f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t - \frac{1}{2}t^2}.$$

   On rappelle que S désigne l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (E). On a

$$\begin{aligned} S &= \ker(\Phi^2 - 4I) \quad \text{d'après la question } 2b \\ &= \ker(\Phi - 2I) \oplus \ker(\Phi + 2I) \text{ d'après la question } 1b \\ &= E_2 \oplus E_{-2} = \mathrm{Vect}(f_2) \oplus \mathrm{Vect}(f_2) \\ &= \left\{t \mapsto c_1 e^{2t - \frac{1}{2}t^2} + c_2 e^{-2t - \frac{1}{2}t^2}, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$