CHAPITRE XVI : APPLICATIONS LINÉAIRES

Correction

a) ($\Rightarrow$) Si $\ker(f) = \ker(g \circ f)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$, montrons que $y = 0_F$. On a $y \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, $y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0$. Ainsi

$$0 = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \text{ donc } x \in \ker(g \circ f) = \ker(f).$$

Donc $y = f(x) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est évidente donc $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Si $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$. Montrons que $\ker(f) = \ker(g \circ f)$. On a toujours $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ (cf exercice 4).
Soit $x \in \ker(g \circ f)$. Montrons $x \in \ker(f)$, ie $f(x) = 0$. Par hypothèse, on a

$$g(f(x)) = g \circ f(x) = 0 \text{ donc } f(x) \in \ker(g). \text{ De plus, } f(x) \in \mathrm{Im}(f).$$

Donc $f(x) \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, ie $f(x) = 0$. Par conséquent, $\ker(g \circ f) \subset \ker(f)$. Par double inclusion, on obtient $\ker(g \circ f) = \ker(f)$.

b) ($\Rightarrow$) Si $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.
Soit $y \in F$. On a

$$g(y) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f) \text{ donc } \exists x \in E,\ g(y) = g \circ f(x).$$

On écrit alors $y = f(x) + (y - f(x))$. D'une part, on a $g(y - f(x)) = g(y) - g(f(x)) = g(y) - g \circ f(x) = 0$ donc $y - f(x) \in \ker(g)$ et d'autre part, on a $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$. On obtient donc l'inclusion $F \subset \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$. L'inclusion $\mathrm{Im}(f) + \ker(g) \subset F$ étant immédiate, il s'ensuit $\mathrm{Im}(f) + \ker(g) = F$.

($\Leftarrow$) Si $\mathrm{Im}(f) + \ker(g) = F$.
On a toujours $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ (cf exercice 4).
Soit $z \in \mathrm{Im}(g)$, montrons $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. On a $z \in \mathrm{Im}(g)$ donc il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. On a $y \in F = \mathrm{Im}(f) + \ker(g)$ donc il existe $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et $y_2 \in \ker(g)$ tels que $y = y_1 + y_2$. Enfin $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y_1 = f(x)$. Dès lors,

$$z = g(y) = g(y_1 + y_2) = g(y_1) + \underbrace{g(y_2)}_{=0 \text{ car } y_2 \in \ker(g)} = g(f(x)) = g \circ f(x) \quad \text{donc } z \in \mathrm{Im}(g \circ f).$$

Il s'ensuit $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$. Par double inclusion, on obtient $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.