CHAPITRE XVI : APPLICATIONS LINÉAIRES
Correction

a)
- L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ en tant que noyau de la forme linéaire φ définie sur $\mathbb{K}^3$ par $\varphi(x,y,z) = x + 2y + z$ et $\mathrm{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par un vecteur.
- On montre $F \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$. Soit $v \in F \cap \mathrm{Vect}(u)$. On a $v \in \mathrm{Vect}(u)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. De plus, $v \in F$ donc $\lambda + 2\lambda + \lambda = 0$ de quoi l'on déduit $\lambda = 0$. Par conséquent, $v = (0,0,0) = 0_{\mathbb{K}^3}$ et $v \in \{0_{\mathbb{K}^3}\}$. Ainsi $F \cap \mathrm{Vect}(u) \subset \{0_{\mathbb{K}^3}\}$. L'inclusion $\{0_{\mathbb{K}^3}\} \subset F \cap \mathrm{Vect}(u)$ étant trivialement vraie, par double inclusion, on obtient $F \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0_{\mathbb{K}^3}\}$.
- On montre $F + \mathrm{Vect}(u) = \mathbb{K}^3$. Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{K}^3$.
Analyse : Supposons qu'il existe $g = (a,b,c) \in F$ et $h \in \mathrm{Vect}(u)$ tels que $v = g + h$. On a $h \in \mathrm{Vect}(u)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $h = \lambda u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Dès lors,

$$v = g + h \Leftrightarrow (x,y,z) = (a+\lambda, b+\lambda, c+\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + \lambda \\ z = c + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x - \lambda \\ b = y - \lambda \\ c = z - \lambda \end{cases}$$

Par ailleurs, on calcule $x + 2y + z = \underbrace{a + 2b + c}_{=0 \ car \ g \in H} + 4\lambda$ donc $\lambda = \frac{x+2y+z}{4}$ de quoi l'on tire

$$\begin{cases} a = x - \frac{x+2y+z}{4} \\ b = y - \frac{x+2y+z}{4} \\ c = z - \frac{x+2y+z}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3x-2y-z}{4} \\ b = \frac{-x+2y-z}{4} \\ c = \frac{-x-2y+3z}{4} \end{cases}.$$

Synthèse : On pose $g = \left(\frac{3x-2y-z}{4}, \frac{-x+2y-z}{4}, \frac{-x-2y+3z}{4}\right)$ et $h = \left(\frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}\right)$. On vérifie
  i) $g + h = \left(\frac{3x-2y-z}{4}, \frac{-x+2y-z}{4}, \frac{-x-2y+3z}{4}\right) + \left(\frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}\right) = (x,y,z) = v$,
  ii) $h = \left(\frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}\right) = \frac{x+2y+z}{4}(1,1,1) = \frac{x+2y+z}{4}u \in \mathrm{Vect}(u)$,
  iii) $\frac{3x-2y-z}{4} + 2\frac{-x+2y-z}{4} + \frac{-x-2y+3z}{4} = 0$ donc $g \in F$.
Ainsi, il existe $(g,h) \in F \times \mathrm{Vect}(u)$ tel que $v = g + h$ donc $\mathbb{K}^3 \subset F + \mathrm{Vect}(u)$. L'inclusion $F + \mathrm{Vect}(u) \subset \mathbb{K}^3$ est immédiate donc par double inclusion, on a $F + \mathrm{Vect}(u) = \mathbb{K}^3$.

b) L'analyse-synthèse précédente montre que pour $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $v = g + h$ avec $g \in F$ et $h \in \mathrm{Vect}(u)$ où

$$g = \left(\frac{3x-2y-z}{4}, \frac{-x+2y-z}{4}, \frac{-x-2y+3z}{4}\right) \text{ et } h = \left(\frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}\right).$$

Par conséquent, $s(v) = g - h$ donc

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \left(\frac{3x-2y-z}{4}, \frac{-x+2y-z}{4}, \frac{-x-2y+3z}{4}\right) - \left(\frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}, \frac{x+2y+z}{4}\right) \\ &= \left(\frac{x-2y-z}{2}, \frac{-x-z}{2}, \frac{-x-2y+z}{2}\right). \end{aligned}$$