

CHAPITRE XVI : APPLICATIONS LINÉAIRES

Correction

- a) Soit $y \in \text{Im}(f + g)$. Par définition de l'image d'une fonction, il existe $x \in E$ tel que $y = (f + g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im}(f)} + \underbrace{g(x)}_{\in \text{Im}(g)}$. Donc $y \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Par conséquent, on a

$$\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g).$$

- b) Soit $x \in \ker(f) \cap \ker(g)$. On a

$$x \in \ker(f) \text{ donc } f(x) = 0 \text{ et } x \in \ker(g) \text{ donc } g(x) = 0.$$

Dès lors, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$ donc $x \in \ker(f + g)$. Ainsi, on a établi

$$\ker(f) \cap \ker(g) \subset \ker(f + g).$$