CHAPITRE XVI : APPLICATIONS LINÉAIRES
Correction

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

a) Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(u,v)\in E^2$. Les vecteurs u et v peuvent se réécrire sous la forme $u=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ et $v=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ de telle sorte que $\lambda u+\mu v=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
&f(\lambda u+\mu v)\\
=&f(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)=(2[\lambda x_1+\mu x_2]-3[\lambda y_1+\mu y_2],9[\lambda y_1+\mu y_2]-6[\lambda x_1+\mu x_2])\\
=&(\lambda[2x_1-3y_1]+\mu[2x_2-3y_2],\lambda[9y_1-6x_1]+\mu[9y_2-6x_2])\\
=&\lambda(2x_1-3y_1,9y_1-6x_1)+\mu(2x_2-3y_2,9y_2-6x_2)=\lambda f(x_1,y_1)+\mu f(x_2,y_2)\\
=&\lambda f(u)+\mu f(v).
\end{aligned}$$

La fonction f est linéaire.

b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
&(x,y)\in\ker(f)\\
\Leftrightarrow& f(x,y)=0_{\mathbb{R}^2}\Leftrightarrow(2x-3y,9y-6x)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=0\\-3(2x-3y)=0\end{cases}\Leftrightarrow 2x-3y=0\\
\Leftrightarrow& y=\frac{2}{3}x.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ker(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=0\}=\left\{\left(x,\frac{2}{3}x\right),\ x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\cdot\left(1,\frac{2}{3}\right),\ x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Par conséquent, $\ker(f)=\mathrm{Vect}(a')$ où $a'=(1,\frac{2}{3})$ mais aussi $\ker(f)=\mathrm{Vect}(a)$ où $a=(3,2)$.

c) On remarque d'ores et déjà que $f(x,y)=(2x-3y,-3(2x-3y))=(2x-3y)\cdot(1,-3)$ donc $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Vect}(b)$ avec $b=(1,-3)$.
Soit $v\in\mathrm{Vect}(b)$. Il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $v=\lambda b=(\lambda,-3\lambda)$. En posant $u=(-\lambda,-\lambda)$, on vérifie

$$f(u)=f(-\lambda,-\lambda)=(\lambda,-3\lambda)=v\text{ donc }v\in\mathrm{Im}(f).$$

Il s'ensuit $\mathrm{Vect}(b)\subset\mathrm{Im}(f)$ puis par double inclusion, on obtient $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(b)$ avec $b=(1,-3)$.