CHAPITRE XV : ESPACES VECTORIELS
Correction

a) On rappelle que $f(G) = \{f(x_G),\ x_G \in G\}$.

- Puisque f est linéaire, on a $f(0_E) = f(0 \times 0_E) = 0 \times f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(G)$ et $f(G) \neq \emptyset$.
- Soient $y_1 \in f(G)$, $y_2 \in f(G)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(x_1, x_2) \in G^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Ainsi
$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \quad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
Or, comme F a une structure d'espace vectoriel, on a $\lambda \underbrace{x_1}_{\in G} + \mu \underbrace{x_2}_{\in G} \in G$ puis $\lambda y_1 + \mu y_2 \in f(G)$.

Grâce à la caractérisation des sev, $f(G)$ est un sev de F. Ainsi, dans toute la suite, en tant qu'image directe d'un sev par une application linéaire, $f(G)$, $f(H)$ et $f(G+H)$ sont des sev de F.

b) Soit $y \in f(G+H)$. Par définition de l'image directe, il existe $x \in G+H$ tel que $y = f(x)$. De plus, par définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels, il existe $(g,h) \in G \times H$ tels que $x = g+h$. Dès lors, la fonction f étant linéaire, on a
$$y = f(x) = f(g+h) = f(g) + f(h) \in f(G) + f(H) \quad \text{car} \quad f(g) \in f(G) \text{ et } f(h) \in f(H).$$
Ainsi $f(G+H) \subset f(G) + f(H)$.
Soit $y \in f(G) + f(H)$. Par définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels (ici $f(G)$ et $f(H)$), il existe $z_1 \in f(G)$ et $z_2 \in f(H)$ tels que $y = z_1 + z_2$. De plus
$$z_1 \in f(G) \text{ donc } \exists x_1 \in G \ :\ \ z_1 = f(x_1) \quad \text{et } z_2 \in f(H) \text{ donc } \exists x_2 \in H \ :\ \ z_2 = f(x_2).$$
La fonction f étant linéaire, on a
$$y = z_1 + z_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(G+H) \quad \text{car } x_1 + x_2 \in G + H.$$
Ainsi $f(G+H) \subset f(G) + f(H)$. Par double inclusion, on obtient $f(G+H) = f(G) + f(H)$.

c) On a $G \subset G+H$ donc $f(G) \subset f(G+H)$. De même $H \subset G+H$ donc $f(H) \subset f(G+H)$.

- On a déjà $f(G) + f(H) = f(G \oplus H)$ d'après la question précédente.
- On montre $f(G) \cap f(H) = \{0\}$. $f(G)$ et $f(H)$ étant des sous-espaces vectoriels de F (image d'un espace vectoriel par une application linéaire), ils contiennent tous deux le vecteur nul. Ainsi, $\{0_F\} \subset f(G) \cap f(H)$. On montre maintenant $f(G) \cap f(H) \subset \{0_F\}$.
Soit $y \in f(G) \cap f(H)$. On a
$$y \in f(G) \text{ donc } \exists x_1 \in G \text{ tel que } y = f(x_1) \ \text{ et } \ y \in f(H) \text{ donc } \exists x_2 \in H \text{ tel que } y = f(x_2).$$
Ainsi, $f(x_1) = f(x_2) = y$. La fonction f étant injective, il vient $x_1 = x_2$. En posant $x = x_1 = x_2$, on a
$$x = x_1 \in G \text{ et } x = x_2 \in H \text{ donc } x \in G \cap H = \{0_E\} \text{ car } G \text{ et } H \text{ sont en somme directe.}$$
Ainsi, $x = 0_E$ puis $y = f(x) = f(0_E) = 0_F$. Il s'ensuit $f(G) \cap f(H) \subset \{0_F\}$. Par double inclusion, on obtient $f(G) \cap f(H) = \{0_F\}$.
- Par conséquent, les sous-espaces vectoriels $f(G)$ et $f(H)$ sont supplémentaires dans $f(G+H) = f(G \oplus H)$, ie $f(G) \oplus f(H) = f(G \oplus H)$.