CHAPITRE XV : ESPACES VECTORIELS
Correction

a)
- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ est de trace nulle donc $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in E$ et $E \neq \emptyset$.
- Soient $(M, N) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $\mathrm{tr}(N) = 0$ donc

$$\mathrm{tr}(\lambda M + \mu N) = \lambda \underbrace{\mathrm{tr}(M)}_{=0} + \mu \underbrace{\mathrm{tr}(N)}_{=0} = 0.$$

Ainsi $\lambda M + \mu N \in E$.

Grâce à la caractérisation des sev, E est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Remarque : D'ici peu, on pourra voir que E est un sev en tant que noyau de la forme linéaire tr.

b) Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $M \in E$ ssi $a + d = 0$ donc

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Remarque : Les trois matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont de trace nulle donc appartiennent E. Par conséquent, l'ensemble E contient l'espace vectoriel engendré par ces matrices. Autrement dit, on a

$$\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \subset E.$$

c) Puisque les trois matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ sont de trace nulle, elles appartiennent à E. Par conséquent, l'ensemble E contient l'espace engendré par ces matrices, ie

$$\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right] \subset E.$$

Pour montrer que cette inclusion est stricte, il suffit donc d'exhiber une matrice de trace nulle qui n'est pas de la forme

$$b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 3c \\ b + 3c & -a - 2c \end{pmatrix}.$$

En regardant les coefficients non diagonaux, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de trace nulle mais n'appartient pas à $\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right]$.