CHAPITRE XV : ESPACES VECTORIELS
Correction

- $\mathrm{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par un vecteur.
- On montre que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. H est non vide car $(0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $0+\cdots+0=0$.
Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in H^2$. On peut écrire $u=(x_1,...,x_n)$ et $v=(y_1,...,y_n)$ avec $x_1+\cdots+x_n=0$ et $y_1+\cdots+y_n=0$. $\lambda u+\mu v$ s'écrit sous la forme $(\lambda x_1+\mu y_1,...,\lambda x_n+\mu y_n)$ et vérifie
$$(\lambda x_1+\mu y_1)+\cdots+(\lambda x_n+\mu y_n)=\lambda(\underbrace{x_1+\cdots+x_n}_{=0 \text{ car } u\in H})+\mu(\underbrace{y_1+\cdots+y_n}_{=0 \text{ car } v\in H})=0$$
donc $\lambda u+\mu v \in H$.
Grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On aurait également pu remarquer que H est le noyau de la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à $(x_1,...,x_n)$ associe $x_1+\cdots+x_n$.
- On montre $H\cap\mathrm{Vect}(u)=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. D'ores et déjà, H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ donc contiennent le vecteur nul. Ainsi, $\{0_{\mathbb{R}^n}\}\subset H\cap\mathrm{Vect}(u)$.
On montre maintenant l'inclusion $H\cap\mathrm{Vect}(u)\subset\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Soit $v\in H\cap\mathrm{Vect}(u)$. $v\in\mathrm{Vect}(u)$ donc il existe un réel λ tel que $v=\lambda u=(\lambda,...,\lambda)$.
$v=(\lambda,...,\lambda)\in H$ donc $\lambda+\cdots+\lambda=0 \Leftrightarrow n\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$.
Ainsi, $v=(0,...,0)=0_{\mathbb{R}^n}$ donc $H\cap\mathrm{Vect}(u)\subset\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Par double inclusion, on obtient $H\cap\mathrm{Vect}(u)=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
- On montre $H+\mathrm{Vect}(u)=\mathbb{R}^n$. Les ensembles H et $\mathrm{Vect}(u)$ étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, on a d'ores et déjà $H+\mathrm{Vect}(u)\subset\mathbb{R}^n$. On montre maintenant $\mathbb{R}^n\subset H+\mathrm{Vect}(u)$.
Soit $v=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$.
Analyse : On suppose qu'il existe $w=(y_1,...,y_n)\in H$ et $z\in\mathrm{Vect}(u)$ tels que $v=w+z$. On a $z\in\mathrm{Vect}(u)$ donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $z=(\lambda,...,\lambda)$. Dès lors, on peut réécrire
$$v=w+z \Leftrightarrow (x_1,...,x_n)=(y_1+\lambda,...,y_n+\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1+\lambda \\ \quad\vdots \\ x_n=y_n+\lambda \end{cases}.$$
En sommant ces n équations, il vient
$$x_1+\cdots+x_n=\underbrace{y_1+\cdots+y_n}_{=0 \text{ car } w\in H}+n\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$
De plus, pour tout entier $i\in[\![1,n]\!]$, on a $y_i=x_i-\lambda=x_i-\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.
Synthèse : On pose $z=\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},...,\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$ et $w=v-z$. Par construction, on a :
   i) $v=w+z$,
   ii) $z=\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},...,\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}(1,...,1)=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}u\in\mathrm{Vect}(u)$,

iii) $w = \left(x_1 - \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, ..., x_n - \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$ vérifie

$$\left(x_1 - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) + \cdots + \left(x_n - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = x_1 + \cdots + x_n - n\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 0.$$

donc $w \in H$.

Ainsi, $v \in H + \mathrm{Vect}(u)$ puis $\mathbb{R}^n \subset H + \mathrm{Vect}(u)$. Par double inclusion, on obtient $\mathbb{R}^n = H + \mathrm{Vect}(u)$.

- H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont ainsi deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.