CHAPITRE XV : ESPACES VECTORIELS

Correction

- On montre que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des opérations usuelles. La fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$ est constante donc G est non vide. De plus, une combinaison linéaire de deux fonctions constantes est une fonction constante.
  Grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- On montre que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des opérations usuelles.
  La fonction nulle $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(0) = 0$ donc H est non vide.
  Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in H^2$. Ainsi, on a $f(0) = g(0) = 0$ donc

  $$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \quad \text{donc } \lambda f + \mu g \in H.$$

  Grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- On montre $G \cap H = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$. La fonction nulle est à la fois constante et nulle en zéro donc $\{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\} \subset G \cap H$. On montre désormais $G \cap H \subset \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$.
  Soit $f \in G \cap H$. On a $f \in G$ donc f est constante. En particulier

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) = 0 \quad \text{car} \quad f \in H.$$

  Ainsi f est la fonction nulle, ie $f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$. Par conséquent, on a $G \cap H \subset \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$.
  Par double inclusion, on obtient $G \cap H = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}\}$.

- On montre que $G + H = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Les ensembles G et H étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on a d'ores et déjà $G + H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On montre maintenant $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset G + H$.
  Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On a $f = f - f(0) + f(0)$. En posant

  $$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(0) \end{cases} \qquad \text{et } h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - f(0) \end{cases},$$

  on a $g \in G$ et $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ donc $h \in H$. Ainsi, il existe $g \in G$ et $h \in H$ telles que $f = g + h$. Par conséquent, $f \in G + H$ puis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset G + H$.
  Par double inclusion, on obtient $G + H = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Les ensembles G et H sont donc deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.