CHAPITRE XV : ESPACES VECTORIELS
Correction

⋄ Méthode 1 : On utilise la caractérisation des sev.

- En choisissant $a = b = 0$, on montre que la matrice nulle appartient à E donc $E \neq \emptyset$.
- Soient $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in E$, $N = \begin{pmatrix} c+d & d \\ -d & c-d \end{pmatrix} \in E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \lambda M + \mu N &= \lambda \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c+d & d \\ -d & c-d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c + \lambda b + \mu d & \lambda b + \mu d \\ -(\lambda b + \mu d) & \lambda a + \mu c - (\lambda b + \mu d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta \\ -\beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\alpha = \lambda a + \mu c$ et $\mu = \lambda b + \mu d$. Ceci justifie $\lambda M + \mu N \in E$.

L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
⋄ Méthode 2 : On remarque

$$\begin{aligned} A \in E &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A \in \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $E = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en tant que sev engendré par une famille de vecteurs.