CHAPITRE XV : ESPACES VECTORIELS
Correction

Les ensembles E et F sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ qui, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
◇ L'ensemble E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car E n'est pas stable par addition. En effet, en posant $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 1, 0)$, les vecteurs u et v appartiennent à E mais $u + v = (2, 0, 0)$ n'appartient pas à E car $|2| \neq |0|$.
◇ On montre que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- L'ensemble F est non vide car $0 + 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in F$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in F^2$. Il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tels que $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$. Dès lors, $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ et
$$\lambda x + \mu x' + 2(\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z') = \lambda(\underbrace{x + 2y + 3z}_{=0 \ car \ u \in F}) + \mu(\underbrace{x' + 2y' + 3z'}_{=0 \ car \ v \in F}) = 0$$
donc $\lambda u + \mu v$ appartient à F.

Grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels, on déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.