CHAPITRE XIV : ACCROISSEMENTS FINIS
Correction

Pour tout réel $x > 0$, la fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Grâce à l'égalité des accroissements finis,

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}(x+1-x) = \frac{1}{c_x}.$$

Comme $x \in]x, x+1[$, on obtient les inégalités $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x}$. Par conséquent

$$\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

On en déduit, que pour tout réel $x > 1$, on a $\ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x} < \ln(x) - \ln(x-1)$. En appliquant cette dernière double inégalité aux entiers, il vient

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p \geqslant 2, \quad \ln(p+1) - \ln(p) < \frac{1}{p} < \ln(p) - \ln(p-1).$$

En sommant toutes ces inégalités pour p compris entre $n+1 \geqslant 2$ et kn, on obtient

$$\sum_{p=n+1}^{nk} \ln(p+1) - \ln(p) < \sum_{p=n+1}^{nk} \frac{1}{p} < \sum_{p=n+1}^{nk} \ln(p) - \ln(p-1).$$

En simplifiant les sommes télescopiques apparues, on obtient

$$\ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) = \ln(nk+1) - \ln(n+1) < \sum_{p=n+1}^{nk} \frac{1}{p} < \ln(nk) - \ln(n) = \ln(k).$$

En faisant tendre n vers l'infini (k fixé), on obtient par encadrement

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=n+1}^{nk} \frac{1}{p} = \ln k.$$