CHAPITRE XIV : ACCROISSEMENTS FINIS
Correction

a) Considérons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. La fonction f est continue sur $[10000, 10001]$ et dérivable sur $]10000, 10001[$. Par ailleurs,

$$\forall x \in]10000, 10001[, \quad 0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[10000, 10001]$, on obtient

$$|\sqrt{10001} - 100| = |f(10001) - f(10000)| \leqslant \frac{1}{200}|10001 - 10000| = \frac{1}{200} = 5 \times 10^{-3} = 0,005.$$

b) Considérons la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array} \right.$. La fonction g est continue sur $[0,999; 1]$ et dérivable sur $]0,999; 1[$. Par ailleurs,

$$\forall x \in]0,999; 1[, \quad 0 \leqslant |f'(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{0,999^2} \leqslant 3.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[0,999; 1]$, on obtient

$$|\frac{1}{0,999^2} - 1| = |f(0,999) - f(1)| \leqslant 3|0,999 - 1| = 3 \times 10^{-3} = 0,003.$$

c) Considérons la fonction $h : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$. La fonction h est continue sur $[1; \frac{\pi}{3}]$ et dérivable sur $]1, \frac{\pi}{3}[$. Par ailleurs,

$$\forall x \in]1, \frac{\pi}{3}[, \quad 0 \leqslant |h'(x)| = |\sin(x)| \leqslant 1$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à h sur $[1, \frac{\pi}{3}]$, on obtient

$$\left|\cos(1) - \frac{1}{2}\right| = \left|h(1) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \leqslant \left|1 - \frac{\pi}{3}\right| \leqslant 5 \times 10^{-2} = 0,05.$$