CHAPITRE XIV : ACCROISSEMENTS FINIS
Correction

a) Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{\frac{1}{x}} \end{array} \right.$. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$,

$$g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}.$$

De plus, pour tout réel $x>0$, la fonction g est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ (car g l'est sur $]0,+\infty[$). Grâce à l'égalité des accroissements finis,

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad g(x+1) - g(x) = g'(c_x)(x+1-x) = g'(c_x).$$

On a $x < c_x < x+1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} c_x = +\infty$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 1$. Par composition des limites, on déduit

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} g(x+1) - g(x) = \lim_{x\to+\infty} g'(c_x) = 1.$$

b) Soit $h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right.$. La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$,

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

De plus, pour tout réel $x>0$, la fonction h est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ (car h l'est sur $]0,+\infty[$). Grâce à l'égalité des accroissements finis,

$$\exists c_x \in]x, x+1[, \quad h(x+1) - h(x) = h'(c_x)(x+1-x) = h'(c_x).$$

On peut alors réécrire, pour tout réel $x>0$,

$$x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = x^2(h(x+1) - h(x)) = -\frac{x^2}{c_x^2} e^{\frac{1}{c_x}}.$$

On a $x < c_x < x+1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} c_x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{c_x^2} = 1$. Par composition des limites, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2(h(x+1) - h(x)) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{c_x^2} e^{\frac{1}{c_x}} = -1.$$