CHAPITRE XIV : ACCROISSEMENTS FINIS
Correction

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, elle est donc dérivable et sa fonction dérivée $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue. En tant que fonction continue sur un segment, la fonction f' est bornée (et atteint ses bornes). Autrement dit, il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f'(x)| \leqslant M.$$

Par ailleurs, pour tous réels x et y dans $[a,b]$, la fonction f est continue sur $[x,y]$, dérivable sur $]x,y[$ et pour tout $t \in]x,y[$, on a $|f'(t)| \leqslant M$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[x,y]$, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Autrement dit, la fonction f est M-lipschitzienne.