# CHAPITRE XIV : ACCROISSEMENTS FINIS

Correction

a) Si $x \in [1,2]$ alors $\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$ et $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$. Donc
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leqslant 1 + 1 = 2.$$
Ainsi, $f(x) \in [1,2]$. Autrement dit, $f([1,2]) \subset [1,2]$.

b) La suite $(u_n)$ vérifie $u_0 = 1 \in [1,2]$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La question précédente montre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1,2].$$
Par stabilité des inégalités larges par passage à la limite, si $(u_n)$ converge vers $\ell$ alors $\ell$ appartient à $[1,2]$.

La fonction $f$ est continue $[1,2]$ en que somme de fonctions continues sur $[1,2]$ donc, si $(u_n)$ converge vers $\ell$, on a $f(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

On résout dans $[1,2]$ l'équation $f(x) = x$. On a
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{2x} = x \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ car } x > 0.$$
On a $\sqrt{2} \in [1,2]$ qui est la seule solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1,2]$ donc si $(u_n)$ converge, on a nécessairement
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}.$$

c) La fonction $f$ est dérivable sur $[1,2]$ et pour tout $x \in [1,2]$, on a $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ donc
$$\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce à l'inégalité des accroissements finis, on a
$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| = |f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|.$$

d) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$.
- Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \sqrt{2}| = \frac{1}{2^0}|u_0 - \ell|$.
- On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$. On écrit alors
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{2}| = |f(u_n) - \sqrt{2}| &\leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}| \text{ d'après la question précédente,} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|u_0 - \ell| = \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \sqrt{2}| \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a
$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{2} - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par conséquent, la suite $(u_n)$ est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}.$$