CHAPITRE XIV : ACCROISSEMENTS FINIS
Correction

a) On a $g(a) = 0$. On choisit alors A de manière à avoir $g(b) = 0$ de telle sorte que $g(a) = g(b) = 0$. On a

$$\begin{aligned} g(b) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f(a)+f(b)}{2} - \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b-a)^2 A\right) \\ &\Leftrightarrow A = \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on pose $A = \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$.

b) La fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ car f l'est et vérifie $g(a) = g(b) = 0$. Grâce au théorème de Rolle,

$$\begin{aligned} \exists c \in]a,b[, \quad g'(c) = 0 &\Leftrightarrow \exists c \in]a,b[, \quad \frac{f'(c)}{2} - \frac{f'\left(\frac{a+c}{2}\right)}{2} = 2(c-a)A \\ &\Leftrightarrow \exists c \in]a,b[, \quad f'(c) - f'\left(\frac{a+c}{2}\right) = 4(c-a)A. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction f' est continue sur $[\frac{a+c}{2}, c]$ et dérivable sur $]\frac{a+c}{2}, c[$ car f est deux fois dérivable sur $[a, b]$. Grâce à l'égalité des accroissements finis,

$$\exists d \in \left]\frac{a+c}{2}, c\right[\subset]a,b[, \quad f'(c) - f'\left(\frac{a+c}{2}\right) = f''(d)\left[c - \frac{a+c}{2}\right] = f''(d)\frac{c-a}{2}.$$

Par conséquent,

$$\exists d \in]a,b[, \quad 4(c-a)A = f''(d)\frac{c-a}{2} \Leftrightarrow \exists d \in]a,b[, \quad \frac{1}{8}f''(d) = A.$$

Étant donnée la valeur de A obtenue lors de la question précédente, on obtient

$$\exists d \in]a,b[, \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(d).$$