CHAPITRE XIV : ACCROISSEMENTS FINIS
Correction

a) On a déjà $g(b) = 0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} g(b) = g(a) \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2}A = 0 \\ \Leftrightarrow A = \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\right]. \end{aligned}$$

b) La fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (car f est deux fois dérivable sur I donc f et f' sont dérivables sur I) et vérifie $g(a) = g(b)$. Grâce au théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in I$, on a

$$g'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + (b-x)A = (b-x)(A - f''(x)).$$

La relation $g'(c) = 0$ se réécrit ainsi $f''(c) = -A = \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\right]$, autrement dit

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$