CHAPITRE XIII : DÉRIVABILITÉ

Correction

$\diamond$ Méthode 1 : La fonction f est supposée être dérivable en 0 donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'(0)$. Or, pour tout $x\neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x}=2\underbrace{\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}}_{\longrightarrow f'(0)}-\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{\longrightarrow f'(0)}.$$

Par opérations sur les limites, on obtient immédiatement $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=2f'(0)-f'(0)=f'(0)$.

$\diamond$ Méthode 2 : La fonction f est dérivable en 0 donc admet un développement limité d'ordre 1 en 0. Ainsi, il existe $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ et $f(x)=f(0)+xf'(0)+x\varepsilon(x)$. On peut alors écrire

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\frac{f(0)+2xf'(0)+2x\varepsilon(2x)-(f(0)+xf'(0)+x\varepsilon(x))}{x}=f'(0)+2\varepsilon(2x)-\varepsilon(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}f'(0).$$