CHAPITRE XIII : DÉRIVABILITÉ

Correction

Pour tout t appartenant à I, on a $|f(t)| = \sqrt{f(t)\overline{f}(t)}$. La fonction f étant dérivable sur I, la fonction $\overline{f}$ est dérivable sur I. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable sur $]0, +\infty[$, par composition de fonctions dérivables, la fonction $t \to |f(t)| = \sqrt{f(t)\overline{f}(t)}$ est dérivable en tout point t où $f(t)\overline{f}(t) = |f(t)|^2 > 0$, c'est-à-dire en tout point où f ne s'annule pas. De plus, si $f(t) \neq 0$, on a

$$|f|'(t) = \frac{(f\overline{f})'(t)}{2\sqrt{f(t)\overline{f}(t)}} = \frac{f'(t)\overline{f}(t) + f(t)\overline{f}'(t)}{2|f(t)|} = \frac{f'(t)\overline{f}(t) + f(t)\overline{f'}(t)}{2|f(t)|} = \frac{Re\left(f(t)f'(t)\right)}{|f(t)|}.$$