CHAPITRE XIII : DÉRIVABILITÉ

Correction

a) Une primitive de $x \mapsto -(nx-1)$ est $x \mapsto -\left(\frac{nx^2}{2} - x\right)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{\frac{nx^2}{2} - x}.$$

La fonction f_n est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' - (nx-1)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. D'après ce qui précède, il existe un réel λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f_n(x) = \lambda e^{\frac{nx^2}{2} - x}$. La condition $f_n(0) = 1$ se traduit par $\lambda = 1$ donc la fonction f_n est donnée par

$$f_n : x \mapsto e^{\frac{nx^2}{2} - x}.$$

b) On note g la fonction $x \mapsto nx - 1$ de telle sorte que l'on puisse écrire $f_n' = g f_n$. On a $g' = n$ et, pour tout $k \geqslant 2$, on a $g^{(k)} = 0$. Grâce à la formule de Leibniz, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f_n^{(2p+1)} = (f_n')^{(2p)} = (g f_n)^{(2p)} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} g^{(k)} f_n^{(2p-k)} = \sum_{k=0}^{1} \binom{2p}{k} g^{(k)} f_n^{(2p-k)} = g f_n^{(2p)} + 2pg' f_n^{(2n-1)} \\ = g f_n^{(2p)} + 2pn f_n^{(2n-1)}. \end{aligned}$$

Comme $g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, il vient

$$f_n^{(2p+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) f_n^{(2p)}\left(\frac{1}{n}\right) + 2pn f_n^{(2p-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 2pn f_n^{(2p-1)}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On montre alors, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_n^{(2p+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

- Pour $p = 0$, on a $f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{g\left(\frac{1}{n}\right)}_{=0} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

- On suppose que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait $f_n^{(2p-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Grâce à la relation obtenue précédemment, on a immédiatement

$$f_n^{(2p+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 2pn f_n^{(2p-1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

  ce qui achève la récurrence.

En particulier, pour $p = n$, il vient $f_n^{(2n+1)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.