CHAPITRE XIII : DÉRIVABILITÉ

Correction

Raisonnons par l'absurde et supposons que f' ne s'annule pas au moins deux fois. Il peut se présenter alors deux cas distincts, soit f' ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, soit f' s'annule une et une seule fois sur $[0, +\infty[$.

- Si f' ne s'annule pas sur $[0, \infty[$, comme f' est continue (car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$), la fonction f' est de signe constant et non nulle. Par conséquent, f se retrouve être strictement monotone sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs, comme f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, grâce au théorème des limites monotones, elle est strictement croissante.
  On a $0 \in f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$ et la fonction f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $f(x_0) = 0$. Le tableau de variation de f est donc de la forme

	0		x_0		$+\infty$
f	-1	↗	0	↗	$+\infty$

  La fonction f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}^+$ alors qu'elle est supposée s'annuler au moins deux fois ! On obtient une contradiction.

- Si f' s'annule en unique point x_0 de $[0, \infty[$, comme f' est continue, la fonction f' est de signe constant et non nulle sur $[0, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$. Par conséquent, f se retrouve être strictement monotone sur $]x_0, +\infty[$. Par ailleurs, comme f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, grâce au théorème des limites monotones, elle est strictement croissante sur $]x_0, +\infty[$. Sur $[0, x_0[$, soit f' est strictement négative, soit elle est strictement positive.

  - Dans la première situation, le tableau de variation de f est donc de la forme

	0		x_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	-1	↘	$f(x_0)$	↗	$+\infty$

    Dans ce cas, la fonction f ne s'annule pas sur $[0, x_0]$ et s'annule une unique fois sur $[x_0, +\infty[$ ce qui contredit le fait que f s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}^+$.

  - Dans la seconde situation, le tableau de variation de f est donc de la forme

	0		x_0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	-1	↗	$f(x_0)$	↗	$+\infty$

Dans ce cas, la fonction f s'annule une unique fois sur $[0, +\infty[$ ce qui contredit le fait que f s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}^+$.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction. Par conséquent la fonction f' s'annule au moins deux fois sur $[0, +\infty[$.