CHAPITRE XIII : DÉRIVABILITÉ

Correction

Soit $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \frac{1}{x}$. Le calcul des premières dérivées de g nous permet de conjecturer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

On prouve cette conjecture par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$\diamond$ Pour $n = 0$, on a bien $g^{(0)}(x) = g(x) = \dfrac{1}{x} = (-1)^0 \dfrac{0!}{x^{0+1}}$.

$\diamond$ Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, la relation $g^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ soit vérifiée. Alors, pour tout réel $x > 0$, on a

$$g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)})'(x) = \left((-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \right)' = -(-1)^n n! \frac{(n+1)x^n}{x^{2(n+1)}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Ce qui achève la récurrence et prouve la formule conjecturée.