

CHAPITRE X : CONTINUITÉ

Correction

La fonction f est bornée donc il existe un réel K_1 tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq K_1.$$

◇ D'une part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f \circ g(x)| = |f(g(x))| \leq K_1.$$

Donc $f \circ g$ est bornée.

◇ D'autre part, $g_{|[-K_1, K_1]} : [-K_1, K_1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un segment donc bornée. Donc

$$\exists K_2 > 0, \forall x \in [-K_1, K_1] : |g(x)| \leq K_2.$$

Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq K_1 \quad \text{puis} \quad |g \circ f(x)| = |g(f(x))| \leq K_2.$$

Autrement dit, $g \circ f$ est bornée.