CHAPITRE XII : CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Correction

1. Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et soit $A \in \mathcal{R}(p)$. On a ainsi $A^p = I_2$. Dès lors, on peut écrire

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^p &= \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)}_{p \text{ fois}} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})AP\cdots P^{-1}A(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}\underbrace{A\cdots A}_{p \text{ fois}}P = P^{-1}A^pP = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2.\end{aligned}$$

On a ainsi $(P^{-1}AP)^p = I_2$ donc $P^{-1}AP \in \mathcal{R}(p)$.

2. Soit $A \in \mathcal{R}(p)$. On a $A^p = I_2$ que l'on peut réécrire

$$AA^{p-1} = A^{p-1}A = I_2.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = A^{p-1}$. Il s'ensuit

$$(A^{-1})^p = (A^{p-1})^p = A^{p(p-1)} = (A^p)^{p-1} = I_2^{p-1} = I_2$$

donc $A^{-1} \in \mathcal{R}(p)$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$A \in \mathcal{R}(p) \Leftrightarrow A^p = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^p & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^p = 1 \\ b^p = 1 \end{cases}.$$

• Si p est un entier impair, on obtient alors

$$A \in \mathcal{R}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} a^p = 1 \\ b^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = I_2.$$

Donc l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{R}(p)$ ne contient que la matrice I_2 comme élément, c'est un ensemble fini de cardinal 1.
• Si p est un entier pair, on obtient alors

$$A \in \mathcal{R}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} a^p = 1 \\ b^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Donc l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{R}(p)$ est l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

c'est un ensemble fini de cardinal 4.

4. On note $d = p \wedge q$.
$\diamond$ Soit $A \in \mathcal{R}(d)$, ie $A^d = I_2$. On montre $A \in \mathcal{R}(p) \cap \mathcal{R}(q)$.
On a $d|p$ et $d|q$ donc il existe deux entiers p' et q' tels que $p = dp'$ et $q = dq'$. On calcule alors
$$A^p = A^{dp'} = (A^d)^{p'} = I_2^{p'} = I_2 \text{ donc } A \in \mathcal{R}(p)$$
$$\text{et } A^q = A^{dq'} = (A^d)^{q'} = I_2^{q'} = I_2 \text{ donc } A \in \mathcal{R}(q).$$
Par conséquent, on a $A \in \mathcal{R}(p)$ et $A \in \mathcal{R}(q)$ donc $A \in \mathcal{R}(p) \cap \mathcal{R}(q)$. On a établi ainsi $\mathcal{R}(d) \subset \mathcal{R}(p) \cap \mathcal{R}(q)$.
$\diamond$ Soit $A \in \mathcal{R}(p) \cap \mathcal{R}(q)$, ie $A^p = I_2$ et $A^q = I_2$. On montre $A \in \mathcal{R}(d)$.
D'après la relation de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $d = pu + qv$. On peut alors réécrire
$$A^d = A^{pu+qv} = A^{pu}A^{qv} = (A^p)^u(A^q)^v = I_2^u I_2^v = I_2 \quad \text{donc } A \in \mathcal{R}(d).$$
On a ainsi établi $\mathcal{R}(p) \cap \mathcal{R}(q) \subset \mathcal{R}(d)$.
$\diamond$ Par double inclusion, il vient $\mathcal{R}(p) \cap \mathcal{R}(q) = \mathcal{R}(d)$.