CHAPITRE XII : CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES
Correction

a) Méthode 1 : Pour les premières puissances de A, on calcule

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 31 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

On conjecture que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Montrons cette relation par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix}$.
- Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait bien $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Alors,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 2(2^n - 1) \\ 0 & 2.2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ce qui achève la récurrence.

Méthode 2 : On écrit $A = I_2 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui vérifie $B^2 = B$ puis, pour tout entier k non nul, $B^k = B$. Par ailleurs, puisque $I_2 B = B I_2$, grâce à la formule du binôme de Newton, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$A^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_2^{n-k} B^k = \underbrace{I_2^n B^0}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B = I_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) B = I_2 + (2^n - 1)B$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Cette expression demeure valable pour $n = 0$.

b) On écrit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = I_3 + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = I_3 + 4B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice B vérifie $B^2 = 0$ de telle sorte que, pour tout $k \geqslant 2$, on a $B^k = 0$. Comme I_3 et $4B$ commutent, la formule du binôme s'applique et donne, pour tout $n \geqslant 1$:

$$A^n = (I_3 + 4B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} (4B)^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} I_3^{n-k} (4B)^k$$
$$= I_3^n (4B)^0 + \binom{n}{1} I_3^{n-1} (4B)^1 = I_3 + 4nB = \begin{pmatrix} 1 + 4n & -4n \\ 4n & 1 - 4n \end{pmatrix}.$$

Cette expression demeure valable pour $n = 0$ puisqu'elle donne $A^0 = I_3$.

c) Le calcul des premières puissances de A nous permet de conjecturer la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

On montre cette relation par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a bien $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^0 = I_2 = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}$.
- Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait bien $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$. Dès lors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\cos(n\theta)\sin(\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta) \\ \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta) & -\sin(n\theta)\sin(\theta) + \cos(n\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  ce qui achève la récurrence et prouve le résultat conjecturé.