CHAPITRE XII : CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES
Correction

a) On calcule

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ 1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + M.$$

b) Pour les premières valeurs de n, nous avons déjà :

Pour $n = 0$,	Pour $n = 1$,	Pour $n = 2$,
$M^0 = I_3 = 1 \times I_3 + 0 \times M$	$M^1 = M = 0 \times I_3 + 1 \times M$	$M^2 = 2I_3 + 1 \times M$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
• Comme nous l'avons déjà remarqué, ce résultat est vrai pour $n = 0$.
• Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 : \quad M^n = a_n I_3 + b_n M$. Alors

$$M^{n+1} = M^n M = (a_n M + b_n I_3)M = a_n M^2 + b_n M = a_n(M + 2I_3) + b_n M = (a_n + b_n)M + 2a_n I_3.$$

En posant $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$, on a trouvé deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$, ce qui achève a récurrence.
• Par conséquent, il existe deux suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $M^n = a_n M + b_n I_3$. Par ailleurs, on a montré au cours de la récurrence que ces deux suites vérifient les relations

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}.$$

c) On a $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout entier positif n, $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$. La suite (a_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Le polynôme caractéristique $r^2 - r - 2$ admettant deux racines réelles $r = -1$ et $r = 2$, il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n.$$

Les valeurs $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ fournissent le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases}$ de quoi l'on tire $\lambda = -1/3$ et $\mu = 1/3$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Enfin, $b_n = 2a_{n-1} = \dfrac{2^n - 2(-1)^{n-1}}{3}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}.$$