CHAPITRE XII : CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Correction

Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
AB = BA &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ a\gamma & a\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha + a\beta \\ a\gamma & b\gamma + a\delta \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha + b\gamma = a\alpha \\ a\beta + b\delta = a\beta + b\alpha \\ a\delta = a\delta + b\gamma \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b\gamma = 0 \\ b\delta = b\alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \delta = \alpha \end{cases} \qquad \text{car } b \neq 0 \\
&\Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des matrices commutant avec A est l'ensemble des matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$