CHAPITRE XII : CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Correction

a) La matrice augmentée du système linéaire étudié est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 9 \end{array}\right).$$

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 9 \end{array}\right) &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -14 & 22 & 17 \end{array}\right)\Bigg|_{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-8L_1}} \\ &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)\Bigg|_{L_3\leftarrow L_3-2L_2}.\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 8x+2y-2z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -7y+11z=10 \\ 0=-3 \end{cases}.$$

Par conséquent, le système considéré est incompatible.

b) La matrice augmentée du système linéaire étudié est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{array}\right).$$

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{array}\right) &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{array}\right)\Bigg|_{L_1\leftrightarrow L_2} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 0 & -2 & -27 & 77 \end{array}\right)\Bigg|_{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-7L_1}} \\ &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & -2 & -27 & 77 \end{array}\right)\Bigg|_{L_2\leftarrow -L_2} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right)\Bigg|_{L_3\leftarrow L_3+2L_2} \\ &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\Bigg|_{L_3\leftarrow -\frac{1}{7}L_3} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\Bigg|_{\substack{L_1\leftarrow L_1-4L_3 \\ L_2\leftarrow L_2-10L_3}} \\ &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)\Bigg|_{L_1\leftarrow L_1-L_2}\end{aligned}$$

Le système linéaire $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases}$, dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right),$$

admet donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$ pour unique solution.

c) La matrice augmentée du système linéaire étudié est la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -1 & 22 \end{array}\right).$$

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -1 & 22 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 25 & -50 & 50 \end{array}\right)\Bigg|_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)\Bigg|_{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{25} L_3}}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Bigg|_{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Bigg|_{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}$$

On a ainsi les systèmes équivalents

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = -4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 2 + 2z \end{cases}.$$

Par conséquent, l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant le système linéaire considéré est l'ensemble

$$\left\{(2 - z, 2 + 2z, z) \in \mathbb{R}^3, \quad z \in \mathbb{R}\right\}.$$