CHAPITRE XI : STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

Correction

On commence par montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
◇ On a $1 = 1 + i \times 0$ donc $1 \in \mathbb{Q}[i]$.
◇ Soient $x = a + ib \in \mathbb{Q}[i]$ et $y = c + id \in \mathbb{Q}[i]$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$. On a d'une part

$$x - y = (\underbrace{a - c}_{\in\mathbb{Q}}) + i(\underbrace{b - d}_{\in\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Q}[i]$$

et d'autre part

$$x \times y = (\underbrace{ac - bd}_{\in\mathbb{Q}}) + i(\underbrace{ad + bc}_{\in\mathbb{Q}}) \in \mathbb{Q}[i].$$

Par conséquent, $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$. Par ailleurs, $\mathbb{Q}[i]$ est commutatif car $\mathbb{C}$ l'est. Il reste à montrer que tout élément non nul de $\mathbb{C}[i]$ est inversible.
Soit $x = a + ib \in \mathbb{Q}[i]$ avec $x \neq 0$, ie $(a, b) \neq (0, 0)$. Dans $\mathbb{C}$, on peut écrire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Le produit, la somme et le quotient de rationnels étant un rationnel (on utilise la structure de corps de $\mathbb{Q}$), on a $\frac{a}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$. Par conséquent, en posant $x^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}[i]$, on a $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$ donc x est inversible dans $\mathbb{Q}[i]$.
L'ensemble $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$ est un corps.