CHAPITRE XI : STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES
Correction

a) Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(xy)^n = 0$. On peut alors écrire $(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = y \times 0 \times x = 0$ donc yx est également nilpotent.

b) Soit $x \in A$ nilpotent. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Si A est inversible, on a alors $x^{n-1} = x^n x^{-1} = 0 \times x^{-1} = 0$. De proche en proche, on arrive à $x = 0$ puis $1 = 0$. Cela correspond au cas $A = \{0\}$. En dehors ce cas, $1 = 0$ est impossible donc x n'est pas inversible.

c) Si $x \in A$ est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. On peut alors écrire

$$1 = 1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

donc $1 - x$ est inversible.

d) On suppose A commutatif. On note N l'ensemble des éléments nilpotents de A.
$\diamond$ On a $0^1 = 0$ donc 0 est nilpotent, ie $0 \in N$ et $N \neq \emptyset$.
$\diamond$ Si $(x, y) \in N^2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ et $y^m = 0$. Puisque x et y commutent, grâce à la formule du binôme de Newton, on peut écrire

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+m-1} &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} x^k y^{n+m-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{k} x^k y^{n+m-1-k} \quad \text{car } x^k = x^{k-n}x^n = 0 \text{ pour } k \geqslant n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m-1}{k} x^k y^m y^{n-1-k} = 0 \quad \text{car } n-1-k \geqslant 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, $x + y \in N$.
$\diamond$ Pour tout $(x, y) \in A^2$, on a $(-x) \times y = -(x \times y)$ (développer $(x + (-x)) \times y = 0$ pour s'en convaincre). Avec $y = -x$, il vient $(-x)^2 = x^2$ puis $(-x)^n = (-1)^n x^n$. Dès lors, si $x \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Par conséquent, $(-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n \times 0 = 0$ donc $-x \in N$.
Grâce à la caractérisation des sous-groupes, $(N, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.