CHAPITRE XI : STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES
Correction

a) L'ensemble G_ω est une partie de $\mathbb{R}$ qui vérifie :
$\diamond$ $G_\omega \neq \emptyset$ car $0 = 0 + 0 \times \omega \in G_\omega$.
$\diamond$ Si $x = a + b\omega \in G_\omega$ et $y = c + d\omega \in G_\omega$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, on peut écrire

$$x - y = a + b\omega - (c + d\omega) = \underbrace{a - c}_{\in\mathbb{Z}} + (\underbrace{b - d}_{\in\mathbb{Z}})\omega \in G_\omega.$$

Grâce à la caractérisation des sous-groupes, l'ensemble G_ω est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

b) • Soit $r \in G_\omega$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$r = a + b\omega = a + b\frac{p}{q} = \frac{aq + pb}{q} = (\underbrace{aq + pb}_{\in\mathbb{Z}}) \times \frac{1}{q} \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, on a $G_\omega \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.
• Soit $r \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$. Il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $r = \frac{c}{q}$. Puisque p et q sont premiers entre eux, grâce au théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $pu + qv = 1$. On peut alors écrire

$$r = \frac{c}{q} = \frac{c \times 1}{q} = \frac{c(pu + qv)}{q} = cu\frac{p}{q} + cv = cu\omega + cv \in G_\omega.$$

Par conséquent, on a $\mathbb{Z}\frac{1}{q} \subset G_\omega$.
• Par double inclusion, il vient $G_\omega = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

c) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G_\omega = \alpha\mathbb{Z}$. On a $1 = 1 + 0 \times \omega \in G_\omega = \alpha\mathbb{Z}$ donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = \alpha q$. On a $\omega = 0 + 1 \times \omega \in G_\omega = \alpha\mathbb{Z}$ donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = \alpha p$. Par conséquent, la relation $1 = \alpha q$ impliquant $q \neq 0$, on peut écrire

$$\omega = p\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est supposé ne pas être le cas. Par conséquent, l'ensemble G_ω est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. Grâce au résultat de l'exercice 14, l'ensemble G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.