CHAPITRE XI : STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES
Correction

a) Soit $g \in G$. On montre que τ_g est bijective.

- Soit $(h_1, h_2) \in G^2$ tel que $\tau_g(h_1) = \tau_g(h_2)$, ie $g \star h_1 = g \star h_2$. Comme g est régulier, il vient $h_1 = h_2$. La fonction τ_g est injective.
- Soit $h \in G$. On peut écrire

$$h = (g \star g^{-1}) \star h = g \star (g^{-1} \star h) = \tau_g(g^{-1} \star h)$$

donc τ_g est surjective.

La fonction τ_g est une bijection de G dans G : c'est une permutation de G.

b) Soit $(g_1, g_2) \in G^2$. Pour tout $h \in G$, on peut écrire

$$\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}(h) = \tau_{g_1}(g_2 \star h) = g_1 \star (g_2 \star h) = (g_1 \star g_2) \star h = \tau_{g_1 \star g_2}(h)$$

donc $\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 \star g_2}$. La fonction $\tau : (G, \star) \mapsto (S_G, \circ)$ est un morphisme de groupes.
Par ailleurs, on peut écrire

$$g \in \ker \tau \Leftrightarrow \tau(g) = \mathrm{Id}_G \Leftrightarrow \tau_g = \mathrm{Id}_G \Leftrightarrow \forall h \in G,\ \tau_g(h) = h \Leftrightarrow \forall h \in G,\ g \star h = h \Leftrightarrow g = e.$$

Ainsi, on a $\ker \tau = \{e\}$ donc τ est un morphisme injectif.

c) On considère $\tau : G \to \mathrm{Im}(\tau)$ (appelée corestriction de τ à $\mathrm{Im}(\tau)$). Par construction, cette fonction est surjective et reste un morphisme de groupes injectif. Ainsi, la fonction $\tau : G \to \mathrm{Im}(\tau)$ est un isomorphisme. Par conséquent, le groupe G est isomorphe à $\mathrm{Im}(\tau)$ qui est un sous-groupe de S_G.