# **CHAPITRE XI :** STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES
Correction

⋄ On a vu en cours que les ensembles $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{N}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
⋄ Soit $H$ un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Si $H = \{0\}$ alors $H = 0\mathbb{Z}$.
Si $H$ contient un élément non nul $a$ alors, comme $H$ est un sous-groupe, l'entier $-a$ appartient à $H$ de telle sorte que l'on peut supposer $a > 0$. Dès lors, l'ensemble $H \cap ]0, +\infty[$ est une partie non vide (elle contient $a$) de $\mathbb{N}^*$. En tant que telle, $H \cap ]0, +\infty[$ contient un plus petit élément que l'on note $a_0$. On va montrer que $G = a_0\mathbb{Z}$.

- On a $a_0 \in H$ donc, grâce à la structure de groupe de $H$, on a $a_0\mathbb{Z} \subset H$.
- Soit $b \in H$. En effectuant la division euclidienne de $b$ par $a_0$, on peut écrire

  $$b = qa_0 + r \text{ avec } 0 \leqslant r < a_0 \text{ et } q \in \mathbb{Z}.$$

  Or $r = \underbrace{b}_{\in G} - q \underbrace{a_0}_{\in G} \in G$ et $r \geqslant 0$. Si $r \neq 0$ alors $r \in H \cap ]0, +\infty[$ et $r < a_0 = \min H \cap ]0, +\infty[$ ce qui est absurde. Par conséquent, on obtient $r = 0$ puis $b = qa_0 \in a_0\mathbb{Z}$ ce qui prouve $H \subset a_0\mathbb{Z}$.

Par double inclusion, on a $H = a_0\mathbb{Z}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $H$ se retrouve être de la forme annoncée.