CHAPITRE XI : STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES
Correction

a) $\diamond$ On montre que φ_a est un morphisme de groupes.
Soit $(x_1, x_2) \in G^2$. On a

$$\varphi_a(x_1 \cdot x_2) = ax_1x_2a^{-1} = ax_1a^{-1}ax_2a^{-1} = \varphi_a(x_1) \cdot \varphi(x_2).$$

$\diamond$ Méthode 1 On remarque que $\varphi_a \circ \varphi_{a'} = Id_G = \varphi_{a'} \circ \varphi_a$ donc φ_a est bijective et $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$. En effet, pour tout $x \in G$, on a

$$\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}}(x) = \varphi_a(a^{-1}xa) = a(a^{-1}xa)a^{-1} = (aa^{-1})x(aa^{-1}) = x$$
$$\text{et } \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a(x) = \varphi_{a^{-1}}(axa^{-1}) = a^{-1}(axa^{-1})a = (a^{-1}a)x(a^{-1}a) = x.$$

Méthode 2 : On a

$$x \in \ker \varphi_a \Leftrightarrow \varphi_a(x) = e \Leftrightarrow axa^{-1} = e \Leftrightarrow x = a^{-1}a = e.$$

Comme $\ker \varphi_a = \{e\}$, φ_a est injective. Pour $y \in G$, on a $\varphi_a(a^{-1}ya) = y$ donc φ_a est surjective.
Par conséquent, φ_a est un morphisme de groupes bijectif de G dans G : c'est un automorphisme de G.

b) Grâce à la question précédente, on a bien $\mathrm{Int}(G) \subset S_G$.
$\diamond$ On a $Id_G = \varphi_e \in \mathrm{Int}(G)$ donc $\mathrm{Int}(G) \neq \emptyset$.
$\diamond$ Soit $(\varphi_a, \varphi_b) \in \mathrm{Int}(G)^2$ avec $(a, b) \in G^2$. Pour tout $x \in G$, on a

$$\varphi_a \circ \varphi_b(x) = \varphi_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{a \cdot b}(x)$$

donc $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a \cdot b} \in \mathrm{Int}(G)$.
$\diamond$ Soit $\varphi_a \in \mathrm{Int}(G)$ avec $a \in G$. On a déjà vu $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}} \in \mathrm{Int}(G)$.
Grâce à la caractérisation des sous-groupes, $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $(S_G, \circ)$.

c) Soit $(a, b) \in G^2$. On a vu dans la question précédente que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a \cdot b}$ ce qui se réécrit

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi_{a \cdot b} = \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Autrement dit, φ est un morphisme de groupes. Par ailleurs, on peut écrire

$$\begin{aligned} a \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(a) = \mathrm{Id}_G \Leftrightarrow \varphi_a = \mathrm{Id}_G \Leftrightarrow \forall x \in G,\ \varphi_a(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in G,\ axa^{-1} = x \\ \Leftrightarrow \forall x \in G, \quad ax = xa. \end{aligned}$$

Le noyau de φ est le centre $Z(G)$ de G aperçu dans l'exercice 4.