CHAPITRE XI : STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES
Correction

L'ensemble Z est une partie de G qui vérifie :
$\diamond$ $Z \neq \emptyset$ car, pour tout $b \in G$, $b \star e = b = e \star b$ donc $e \in Z$.
$\diamond$ Si $(a_1, a_2) \in Z^2$. Pour tout $b \in G$, on a

$$(a_1 \star a_2) \star b = a_1 \star (a_2 \star b) = a_1 \star (b \star a_2) = (a_1 \star b) \star a_2 = (b \star a_1) \star a_2 = b \star (a_1 \star a_2).$$

$a_1 \star a_2$ commute avec tous les éléments de G donc $a_1 \star a_2 \in Z$.
$\diamond$ Si $a \in Z$. On note a' le symétrique de a dans G. Pour tout $b \in G$, on a $b \star a = a \star b$ donc en multipliant à droite par a', il vient

$$(b \star a) \star a' = (a \star b) \star a' \Leftrightarrow b = a \star (b \star a')$$

puis, en multipliant par a' à gauche

$$a' \star b = a' \star (a \star b \star a') = (a' \star a) \star (b \star a') = e \star (b \star a') = b \star a'.$$

L'élément a' commute avec tous les éléments de G donc $a' \in Z$.
Grâce à la caractérisation des sous-groupes, l'ensemble Z est un sous-groupe de G.