CHAPITRE XI : STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES
Correction

a) Soient $(x,y) \in G^2$, ie $|x| < 1$ et $|y| < 1$. On peut écrire

$$1-(x\star y)^2 = 1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{(1+xy)^2} = \frac{(1+xy+x+y)(1-x-y+xy)}{(1+xy)^2}$$
$$= \frac{(1+x)(1+y)(1-x)(1-y)}{(1+xy)^2} = \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2} > 0.$$

Par conséquent, on a $(x\star y)^2 < 1$ ce qui donne $|x\star y| < 1$ puis $x\star y \in]-1,1[= G$. La loi $\star$ est une loi de composition interne sur G.

b) $\diamond$ Soit $(x,y,z) \in G^3$. On a

$$(x\star y)\star z = \frac{x+y}{1+xy}\star z = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy+xz+yz} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$
$$x\star(y\star z)x\star\frac{y+z}{1+yz} = \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz+xy+xz} = \frac{xyz+x+y+z}{1+yz+xy+xz}.$$

Par conséquent, on obtient $(x\star y)\star z = x\star(y\star z)$. La loi $\star$ est associative.
$\diamond$ Pour tout $x \in G$, on a

$$x\star 0 = \frac{x+0}{1+x\times 0} = \frac{x}{1} = x \text{ et } 0\star x = \frac{0+x}{1+0\times x} = \frac{x}{1} = x.$$

L'élément 0 est élément neutre pour $\star$.
$\diamond$ Pour tout $x \in G =]-1,1[$, on a $-x \in]-1,1[=\in G$ et on vérifie

$$x\star(-x) = \frac{x+(-x)}{1+x(-x)} = \frac{0}{1-x^2} = 0 \text{ et } (-x)\star x = \frac{(-x)+x}{1+(-x)x} = \frac{0}{1-x^2} = 0.$$

Par conséquent, tout élément $x \in G$ admet un élément symétrique dans G par $\star$.
L'ensemble$(G,\star)$ est un groupe (abélien car on a clairement $\star$ commutative sur G).